no, y la cotangente es igual al cociente de dividir el coseno por el seno (fig. 102).

Demostración.—Siendo 138, fórm.ˢ [3] y [4]

$$\tan a = \frac{BC}{OC} \qquad \cot a = \frac{OC}{BC},$$

se tendrá, reemplazando por BC y OC sus valores

$$\tan a = \frac{\text{sen}\, a.\ OB}{\cos a.\ OB}, \qquad \cot a = \frac{\cos a.\ OB}{\text{sen}\, a.\ OB},$$

ó

$$\tan a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a}, \quad [2] \qquad \cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a}, \quad [3]$$

Corolario.—De estas expresiones se deduce evidentemente que $\tan a.\ \cot a = 1$ [4].

También se obtiene, observando que tang a y cot a tienen por denominador la unidad, en las expresiones [2] y [3], y después de elevar al cuadrado,

$$\frac{\tan^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a} \qquad \frac{\cot^2 a}{1} = \frac{\cos^2 a}{\text{sen}^2 a},$$

de lo que resulta,

$$\frac{1 + \tan^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a}$$

$$\frac{1 + \tan^2 a}{\tan^2 a} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\text{sen}^2 a}$$

$$\frac{1 + \cot^2 a}{\cot^2 a} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a},$$

$$\frac{1 + \cot^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\text{sen}^2 a},$$

ó

$$\frac{1 + \tan^2 a}{1} = \frac{1}{\cos^2 a}, \qquad \frac{1 + \tan^2 a}{\tan^2 a} = \frac{1}{\text{sen}^2 a},$$

$$\frac{1 + \cot^2 a}{\cot^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}, \qquad \frac{1 + \cot^2 a}{1} = \frac{1}{\text{sen}^2 a},$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 a}, \qquad \operatorname{sen}^2 a = \frac{\operatorname{tang}^2 a}{1 + \operatorname{tang}^2 a},$$

$$\cos^2 a = \frac{\cot^2 a}{1 + \cot a}, \qquad \operatorname{sen}^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a},$$

expresiones por las cuales se obtiene el valor numérico del seno y el coseno de un arco, cuando se conoce la tangente ó la cotangente del mismo.

§ 4.º—Aplicación á las relaciones entre líneas correspondientes á arcos distintos

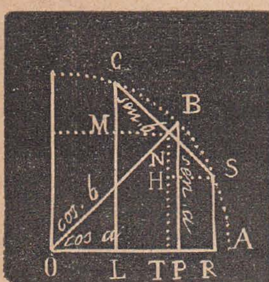

Figura 103.

142. **Teorema.**—*El seno de la suma ó diferencia de dos arcos es igual á la suma ó diferencia de los productos del seno de cada arco por el coseno del otro.* (1)

1.º **Construcción.**—Dados los arcos AB y BC que expresaremos, para brevedad, por las letras a y b (figura 103); trácense las $\perp$s BP $=$ sen a, CL $=$ sen $(a + b)$ al radio AO, la $\perp$ CN $=$ sen b al radio BO, y la $\parallel$ª NM al radio AO.

Demostración.

$$\operatorname{Sen}(a + b) = \mathrm{CL} = \mathrm{LM} + \mathrm{MC};$$

pero en el $\triangle$ rectángulo ONT, se tiene:

NT ó ML (P. 1.ª 108) $=$ NO. sen a (139, 1.º) $=$ cos b sen a.

En el $\triangle$ rectángulo NCM se tiene:

CM$=$CN. cos $\angle$ MCN$=$CN. cos $\angle$ BOA (P. 1.ª 99, *corolario* 3.º) $=$ CN. cos a (30, *cor.*) $=$ sen b cos a,

(1) La demostración de este teorema sólo se extiende aquí á los arcos cuya suma no excede de un cuadrante.

y sumando las dos expresiones, resulta:

$$\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a \cos b + \cos a\ \text{sen}\ b \qquad [1].$$

1.° Como $\text{sen}\ (a - b) = \text{RS} = \text{HT} = \text{NT} - \text{HN}$
y $\text{HN} = \text{CM}$ (por ser el $\triangle\ \text{NHS} = \triangle\ \text{MCN}$),
resulta, restando las mismas expresiones,

$$\text{sen}\ (a - b) = \text{sen}\ a \cos b - \cos a\ \text{sen}\ b \qquad [2].$$

143. **Teorema**.– *El coseno de la suma ó diferencia de dos arcos es igual á la diferencia entre el producto de los cosenos y el producto de los senos de los mismos.*

Demostración.—Siendo

$$\text{TO} = \text{NO}.\cos a\ (139,\ 1.°) = \cos b \cos a,$$
$$\text{y RT} = \text{SH}\ (\text{P. } 1.^{a}\ 108) = \text{SN}.\ \text{sen} \angle \text{HNS} =$$
$$\text{SN}.\ \text{sen} \angle \text{BOA} = \text{SN}.\ \text{sen}\ a = \text{sen}\ b\ \text{sen}\ a,$$

se tendrá, restando y sumando sucesivamente,

$$\text{OL} = \text{OT} - \text{TL} = \text{OT} - \text{RT}\ (\text{P. } 1.^{a}\ 108 \text{ y } 106) =$$
$$\cos a \cos b - \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b$$
$$\text{OR} = \text{OT} + \text{TR} = \cos a \cos b + \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b,$$

es decir,

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b \qquad [3]$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b \qquad [4].$$

Corolario.—Sustituyendo en las expresiones [1] y [3] a en vez de b, resulta:

$$\text{sen}\ 2\,a = \text{sen}\ a \cos a + \cos a\ \text{sen}\ a = 2\ \text{sen}\ a \cos a \quad [5]$$
$$\cos 2\,a = \cos a \cos a - \text{sen}\ a\ \text{sen}\ a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \quad [6].$$

Observación.—Análogamente se podrían obtener las expresiones que dan los valores de sen $3\,a$ y cos $3\,a$, cuando se conozcan los valores de sen a y cos a, y así sucesivamente; pero se ha de tener presente que hasta ahora sólo estamos autorizados para admitir estos resultados mientras el múltiplo dado del arco no exceda del primer cuadrante.

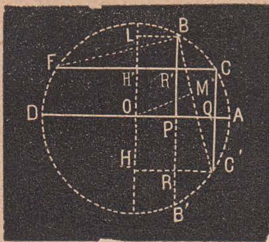

Figura 104.

144. **Teorema.**—*La suma de los senos de dos arcos es igual al doble del seno de la semi-suma de estos arcos por el coseno de su semi-diferencia; la diferencia de los senos de dos arcos es igual al doble del seno de la semi-diferencia de estos arcos por el coseno de su semi-suma.*

La suma de los cosenos de dos arcos es igual al doble del coseno de la semi-suma de estos arcos por el coseno de la semi-diferencia, y la diferencia de los cosenos de dos arcos es igual al doble del seno de la semi-suma de estos arcos por el seno de la semi-diferencia (1).

1.º **Construcción.**—Tómese hacia la parte superior de O la longitud $OL = \text{sen } a$, y hacia la parte inferior la longitud $OH = \text{sen } b$ trácense las $\|^{as}$ LB y HC′ al radio OA y las BB′ y CC′ $\perp^{s}$ á éste; y únase B con C′.

Demostración.—Tenemos:

$$\text{arc } BAC' = a + b; \quad \text{arc } BC = \text{arc } B'C' = a - b;$$

$$BM = \text{sen } \frac{1}{2}(a+b), \quad \text{cuerda } BC' = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}(a+b).$$

En el $\triangle$ rectángulo BRC′, se tiene que

$$BR \text{ ó } LH = BC'.\cos\angle B'BC' \ (139, 1.º);$$

luego, haciendo las sustituciones necesarias,

$$\text{sen } a + \text{sen } b = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b) \ [1].$$

2.º Si, en vez de tomar $OH = \text{sen } b$ en prolongación de OL, tomamos OH′, en el mismo sentido, y por el ex-

(1) Esta demostración por ahora sólo se extiende á los arcos cuya suma no llegue á valer la semi-circunferencia.